MA1 cvičení - příklady z lineární algebry 1.

I. Počítání s vektory a maticemi:

1. a) Určete vektor $\vec{v} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, je-li $\vec{u}_1 = (-1,\ 2,\ 1)$, $\vec{u}_2 = (2,\ 0,\ -1)$, $\vec{u}_3 = (3,\ 1,\ 1)$.
   b) Je-li $\vec{u} = (3,\ 2,\ 2)$, $\vec{v} = (2,\ 1,\ -1)$, spočítejte
   skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$, vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ a smíšený součin $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

2. Vypočítejte (pokud to lze):

   a) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Vypočítejte následující součiny matice a vektoru (jsou-li definovány):

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $(2,\ -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot (2,\ -1)$;

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $(1,\ 2,\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Vypočítejte následující součiny matic (jsou-li definovány):

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

   d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

   e) $(-1\ \ 0\ \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (-1\ \ 0\ \ 4)$; e) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2$; f)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in N$.

II. Řešení soustav lineárních rovnic a procvičení pojmů k tomu potřebných:

1. Najděte všechna řešení soustavy lineární rovnic (nebo ukažte, že soustava řešení nemá) -
   - užijte Gaussovu eliminační metodu:

(i)

a) $\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \\ 2x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= -3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ -3x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$;

c) $\begin{aligned} 2x - y + z + v &= -3 \\ x + y + 3z - v &= 0 \\ -x + 2y - z + v &= 6 \\ x + y + 2z - 3v &= -2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 2x - y + z + v &= 1 \\ y - z &= 0 \\ x + y + 2z + v &= 3 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}$; e) $\begin{aligned} 2x - y + z + v &= 4 \\ y - z &= 0 \\ x + y + 2z + v &= 3 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}$

(ii) soustavy „zapsané pomocí násobení matice a vektoru

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Lineární závislost a nezávislost vektorů (a i užití řešení soustav):

   (i) Ukažte, že vektory
   $$\vec{b}_1 = (1,-1,0),\ \vec{b}_2 = (1,-1,-1),\ \vec{b}_3 = (0,1,-2)$$
   jsou lineárně nezávislé.

   (ii) Rozhodněte, zda vektory
   a) $\vec{b}_1 = (1,-1,0),\ \vec{b}_2 = (1,-1,-1),\ \vec{b}_3 = (0,1,-2),\ \vec{b}_4 = (0,1,-2)$
   b) $\vec{b}_1 = (1,-1,0),\ \vec{b}_2 = (1,-1,-1),\ \vec{b}_3 = (0,1,-2),\ \vec{b}_4 = (2,-1,1)$
   jsou lineárně nezávislé, resp. lineárně závislé.

   (iii) Najděte hodnotu parametru t, pro kterou jsou lineárně závislé vektory
   $$\vec{v}_1 = (1,1,3), \vec{v}_2 = (1,2,1), \vec{v}_3 = (t,-1,7) .$$
   Zjistěte pak, jakou lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ je vytvořen nulový vektor.

3. Najděte hodnost matice A a ověřte, že hodnost matice se rovná hodnosti matice transponované, když:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Určete hodnost matice A.

b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

c) Soustavu $(*)$ vyřešte .

5. a) Ukažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ má hodnost 3.

b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic (*) $A \cdot x = o$?

(zde o je nulový vektor sloupcový, tj. $o = \vec{o}^{\,T}$)

c) Soustavu (*) vyřešte .

6. a) Vysvětlete, co je regulární , respektive singulární čtvercová matice.
Definujte pojem inverzní matice . Kdy k dané matici existuje matice inverzní?

b) Je dána matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ukažte, že matice A je matice regulární a Gauss-Jordanovou metodou určete matici inverzní k matici A .

7. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Vypočítejte součin $A \,.\, B$.

(ii) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji. Dá se použít (i) ?

(iii) Užitím A^{-1} řešte rovnici $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.

8. Existuje reálné číslo a , pro které je singulární matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & a^2 \\ 1 & 2a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a^3 & 1 \end{pmatrix}$?

III. Determinanty a jejich užití:

1. Vypočítejte determinanty :

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} ;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 2 \\ 4 & -5 & c & 6 \\ a & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a & -a & 2a & a \\ b & -b & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3c & -c & 2c & c \end{vmatrix} .$$

2. Najděte všechna řešení rovnice $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$.

3. Bez výpočtu determinantu ukažte, že $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 152 & 263 & 374 & 485 \end{vmatrix} = 0$.

4. Buďte dány matice

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a & a & -2a \\ -1 & 0 & 2 \\ b & b & -3b \end{pmatrix}$;

b) $M = \begin{pmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(i) vypočítejte $\det M$;
(ii) vypočítejte $\det N$;
(iii) vypočítejte $\det(M \cdot N)$ a zkontrolujte si, že platí $\det(M \cdot N) = \det M \, . \, \det N$.

5. Užitím determinantů určete matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Užitím determinantu „zkontrolujte“, že matice A a B z příkladů II / 6. a II / 7. z jsou regulární.